CONTEXTOS DE EDUCACION
© 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC.
Este artículo pertenece a la Revista Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 13-26
y fue descargado desde: www.hum.unrc.edu.ar/ojs/index.php/contextos

LAS TRES DIMENSIONES FUNDAMENTALES DEL PROBLEMA DIDÁCTICO DE LOS NÚMEROS REALES

THE THREE FUNDAMENTAL DIMENSIONS OF THE DIDACTIC PROBLEM OF REAL NUMBERS

Rosa Mabel Licera*, Josep Gascón, Marianna Bosch*****

* Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina) rlicera@exa.unrc.edu.ar
** Universidad Autónoma de Barcelona (España) gascon@mat.uab.cat
*** Universidad Ramon Llull (España) marianna.bosch@iqs.edu

Palabras Clave

Teoría antropológica de lo didáctico

dimensiones de un problema didáctico

problemáticas básica y primordial

números reales

Resumen

En este trabajo presentamos el proceso de construcción de un problema de investigación en didáctica de las matemáticas relativo al estudio de los números reales en la escuela secundaria. Formulamos el problema en el ámbito de la teoría antropológica de lo didáctico y utilizamos un esquema heurístico que describe las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: la epistemológica, que pone en primer lugar el cuestionamiento de los saberes matemáticos involucrados; la económica, que incluye el análisis de las reglas que rigen la organización institucional de dichos saberes y de las formas existentes de organizar su enseñanza; y la ecológica, que integra las cuestiones relativas a las condiciones que mantienen dichas organizaciones matemáticas y didácticas y a las restricciones que inciden sobre los posibles cambios de las mismas en una dirección determinada. El proceso seguido nos conducirá desde la problemática básica en didáctica (el problema docente) a la problemática primordial (el problema curricular) y desde la institución de la enseñanza secundaria a la de formación del profesorado.

Key words

Anthropological Theory of Didactics

dimensions of a didactic problem

basic and primordial problems

real numbers

Abstract

In this paper we present the process of construction of a research problem in the didactics of mathematics related to the study of real numbers in secondary school. We formulated the problem in the field of the Anthropological Theory of Didactics and we used a heuristic scheme that describes the three fundamental dimensions of a didactic problem: the epistemological one, which puts in the first place the questioning of the mathematical knowledge involved; the economic one, which includes the analysis of the rules that govern the institutional organization of said knowledge and the existing ways of organizing its teaching; and the ecological one, which integrates the questions related to the conditions maintained by these mathematical and didactic organizations and the restrictions that affect the possible changes in a certain direction. The process followed will lead us from the basic problem in didactics (the teaching problem) to the primary problem (the curricular problem) and from the institution of secondary education to teacher training.

Cita sugerida: Licera, R., Gascón, J., Bosch, M. (2019). Las tres dimensiones fundamentales del problema didáctico de los números reales. *Contextos de Educación* 26 (19): 13-26

© 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC, Argentina.
Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 13-26

1. Introducción

Tomando la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) como marco teórico y metodológico, presentamos el proceso de construcción de un problema de investigación en didáctica de las matemáticas. Partimos de un *problema docente* (Gascón, 1999) en relación al estudio del sistema de los números reales en la escuela secundaria y describiremos algunas de las cuestiones que forman parte de las tres *dimensiones fundamentales* del mismo (Gascón 2011, Barquero, Bosch, Gascón, 2013). La formulación de dichas cuestiones, las respuestas parciales que propondremos a las mismas y la descripción provisional de algunos de los fenómenos didácticos asociados, constituirán la explicitación de una problemática que hemos estudiado más profundamente en Licera (2017)[1]. Este proceso nos llevará desde la llamada *problemática básica* a la *problemática primordial* en didáctica de la matemática (Chevallard, 2013a) y desde la institución de la enseñanza secundaria al ámbito de la formación del profesorado en el que, finalmente, se situará nuestro problema de investigación. Al mismo tiempo que presentamos las etapas seguidas y la evolución del problema de investigación, iremos describiendo brevemente las nociones teóricas que orientan el proceso.

2. El problema del profesor y la problemática básica

El punto de partida de nuestra investigación está integrado por dos problemas a los que se enfrenta el profesor de matemáticas en el ejercicio de su profesión. El primero puede expresarse sintéticamente en los siguientes términos: *¿cómo tengo que enseñar a mis alumnos el tema números reales en la última etapa de la enseñanza secundaria?* Lo consideramos como un problema docente (o del profesor) porque está formulado utilizando las nociones existentes y las *ideas dominantes* en la institución donde ejerce la profesión (otras cuestiones derivadas son, por ejemplo, ¿cómo *motivar* su estudio?, ¿cómo hacer *significativo* para los estudiantes el trabajo con radicales? Etc.). Desde la cultura escolar se considera que el profesor es el principal responsable de dar respuesta a este tipo de problemas aunque, en realidad, la institución está sujeta a restricciones sociales, pedagógicas, curriculares y epistemológicas sobre las que, desde su posición de profesor, difícilmente puede incidir (Gascón, 1999, p. 129).

El segundo problema que integra nuestro punto de partida es una cuestión técnica profundamente vinculada con la anterior: *¿cómo trabajar correctamente con las aproximaciones decimales?* Esta cuestión, de la que se derivan otras muchas cuestiones, es menos explícita en la cultura escolar porque en esta se considera a la matemática como la ciencia de lo exacto.

Los problemas docentes se encuadran -según la clasificación de los problemas didácticos propuesta por Chevallard (2013a)- dentro de la *problemática básica*:

Dada una institución I (aquí la escuela secundaria), sobre la que pesan un conjunto de restricciones K de todo tipo y dado una obra O (aquí los números reales), ¿qué condiciones C podría llevar a los sujetos de I a encontrar, estudiar, conocer la obra O?

En la formulación de esta problemática se consideran datos del problema relativamente inmodificables (naturalizados, transparentes, incuestionables): la institución *I* involucrada, las restricciones *K* que pesan sobre ella y las obras *O* por enseñar (Ver figura 3).

3. Construcción de un problema de investigación en didáctica de las matemáticas

Para avanzar en el desarrollo de nuestro problema didáctico incorporamos el patrón heurístico propuesto en Gascón (2011), que expresamos de la siguiente manera:

$$\{[P_0 \oplus (P_1 \text{ D } P_2)] \text{ N } P_3\} \text{N } P_\delta$$

En él P_0 —el problema docente— aparece como una formulación inicial pero incompleta del problema. P_1, P_2 y P_3 incorporan tres *dimensiones* consideradas fundamentales cuando un problema didáctico se formula desde la TAD: la dimensión *epistemológica* P_1, que incluye las cuestiones relativas a la naturaleza, funciones y razones de ser de la obra objeto de estudio *O*; la dimensión *económica* P_2, que incluye cuestiones sobre la forma de organizar e interpretar *O* y sobre lo que se hace en la institución de referencia *I* para enseñar y aprender *O*; y la dimensión *ecológica* P_3, que contiene las cuestiones que remiten al conjunto de condiciones *C* y restricciones *K* que permiten, inciden, restringen o incluso impiden la permanencia de dichas organizaciones matemáticas y didácticas así como su posible desarrollo en una dirección determinada. El signo $\oplus$ alude a la necesaria completación de P_0 con P_1 y P_2 para ir conformando un problema didáctico. El símbolo N indica que una formulación «completa» (de P_3 y, en última instancia, de P_δ) requiere de cierta formulación previa (aunque sea implícita) de los P_i que le anteceden. Finalmente P_δ, indica la formulación de un problema didáctico que contiene las tres dimensiones fundamentales del problema, las relaciones entre ellas y algunas cuestiones nuevas (un problema didáctico siempre se puede enriquecer con nuevas cuestiones).

Este esquema general modeliza el proceso que estamos relatando en este trabajo, aunque no pretende ser normativo respecto a los procesos de investigación. En Gascón (2011) se aclara que, aunque P_0 es especialmente *visible* en las primeras etapas del desarrollo de la didáctica de las matemáticas (en las que nos encontramos actualmente), no constituye una dimensión necesariamente presente en todos los problemas didácticos. Además las dimensiones P_1, P_2 y P_3 nunca se recorren (a lo largo de un proceso de investigación) de manera ordenada ni completa.

3.1. Dimensión epistemológica: criterios para la construcción de un modelo epistemológico de referencia en torno a los números reales

Una hipótesis básica de la TAD -que se desprende de la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1997)- es la *relatividad institucional de los saberes* y, consecuentemente, la inexistencia de una posición epistemológica universal o privilegiada como marco de referencia para guiar la investigación en educación matemática. De todos modos, el didacta siempre detenta -a veces en forma implícita y acrítica- un modelo epistemológico, es decir, una manera de entender y describir el ámbito matemático implicado en su investigación. Este modelo proviene de instituciones legitimadas socialmente que imponen su punto de vista o de instituciones de las que el didacta forma o formó parte, posiblemente ocupando distintos roles. Según Josep Gascón:

> *[…] podríamos decir que la didáctica es ciega si ignora que, de hecho, está utilizando tal modelo epistemológico, por latente e impreciso que sea, y que este modelo está condicionando fuertemente no sólo los problemas de investigación didáctica que pueden formularse, sino también las respuestas que se considerarán admisibles (Gascón, 2014, p.156).*

Bajo esta hipótesis, la TAD plantea la necesaria emancipación, por parte del investigador, de sus múltiples sujeciones institucionales (Chevallard, 2006) y establece como dimensión esencial para los análisis didácticos la construcción explícita de un *modelo epistemológico de referencia* (MER) del ámbito de la actividad matemática implicada en el problema de investigación (Bosch y Gascón, 2005, 2007; Gascón, 2011). Este MER no constituye un modelo en el sentido normativo del término -aquello que debería ser- sino una herramienta del trabajo teórico-experimental y, como tal, es siempre provisional, permanentemente puesto a prueba a partir de su contraste con la realidad que se investiga. Su explicitación forma parte de la dimensión epistemológica del problema investigado y es considerada fundamental ya que condiciona (Gascón, 2011):

(a) La amplitud del ámbito matemático más adecuado para plantear el problema didáctico.
(b) Los fenómenos didácticos que serán visibles por el investigador.
(c) Los tipos de problemas de investigación que se pueden plantear.
(d) Las explicaciones tentativas que se podrán proponer.

Por ejemplo, un modelo epistemológico de los números reales expresado mediante una caracterización axiomática y acorde con un modelo epistemológico general de la matemática que identifica el saber matemático con una red de conceptos descritos por rasgos sintácticos y semánticos, tenderá a formular problemas de investigación de corte cognitivo en relación con la apropiación (o construcción) de esta red conceptual por parte de los alumnos.

En lo que sigue, formularemos los criterios generales que guían la construcción del MER que proponemos a modo de hipótesis científica. Correlativamente, describiremos algunos tipos de cuestiones que forman parte de la dimensión epistemológica del problema didáctico de los números reales.

(1) El MER en torno a los números reales debe abarcar todo el ámbito institucional concerniente a la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria -que incluye la formación del profesorado y la propia escuela secundaria- cuestionando y desnaturalizando los puntos de vista que estas instituciones educativas y la propia matemática sabia adoptan sobre los números reales.

(2) Dicho MER debe asumir el triple criterio de solidez epistemológica, curricular y didáctica propuesto por Chevallard (2013) al hablar de la presentación monumentalista -y por lo tanto no funcional- de las obras matemáticas y la necesaria renovación del currículo:

> *[…] para cada "componente" del corpus que se pretende enseñar, la profesión (y desde luego no cada profesor, actuando como si estuviera solo en el mundo) debe poder proponer razones de ser que sean auténticas en el plano epistemológico y social, coherentes en materia curricular y, a la vez, susceptibles de ser conocidas, recibidas, vividas, integradas por los alumnos del nivel de estudios deseado, a través de situaciones didácticas apropiadas (Chevallard, 2013, p.112).*

Este necesario carácter funcional de las matemáticas se materializa en un postulado básico de la TAD que considera la actividad matemática como una *actividad de modelización* reinterpretada como un proceso recursivo y reflexivo (Chevallard, 1989; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Bolea, 2003; Gascón, 2004) entre *praxeologías* (Chevallard 1999).

(3) El MER debe recuperar razones de ser de los números reales, es decir, delimitar cuestiones problemáticas cuyo abordaje ponga en evidencia la pertinencia y fecundidad de ampliar el sistema numérico más allá de los racionales. Algunas de las cuestiones relativas a las posibles razones de ser del sistema de los números reales son las siguientes:

¿Cuál es el ámbito matemático más adecuado para plantear el problema de la introducción de los números reales?, ¿Cuáles son las cuestiones sucesivas a las que podría responder la construcción de una praxeología en torno a los números reales? Es decir: ¿Qué cuestiones problemáticas y en qué ámbito ponen en evidencia las limitaciones de los sistemas numéricos previos y plantean la necesidad de ampliar el campo numérico?, ¿Qué cuestiones problemáticas están en la base de las diferentes caracterizaciones de los números reales?

(4) Postulamos que el MER debe tomar en consideración, de manera nuclear, el problema de la medida de magnitudes continuas y su relación con los números reales.

Tomando como material empírico los trabajos de Bahujama (2005) y Sierra (2006) en el marco de la TAD, en coherencia con el trabajo de los matemáticos Felix Klein (1945) y Henri Lebesgue (1930), y tomando también en consideración las caracterizaciones de los números reales vigentes en el ámbito científico, ubicamos la ampliación del campo numérico de los naturales a los reales en una praxeología matemática que modeliza las cantidades de magnitud continua. Algunas de las cuestiones problemáticas que involucran magnitudes continuas y que no pueden ser resueltas en los sistemas donde estas se plantean se plasman en las siguientes cuestiones que denominamos sucintamente *el problema de la medida*:

¿Cuál es el conjunto de números que dan cuenta de la correspondencia cantidad de magnitud-medida?, ¿Cómo se establece dicha correspondencia?, ¿Cuáles son las técnicas que permiten resolver problemas de comparar cantidades, o de determinar cantidades que se obtienen a partir de otras (mediante acciones tales como adjuntar, quitar, partir)?

Se está preguntando acerca de la relación entre una realidad empírica, el universo de las cantidades de magnitudes continuas y un modelo matemático, un sistema de números. La construcción de los reales positivos como *modelo matemático universal* de toda magnitud escalar continua da la posibilidad teórica de asignar a cada cantidad de magnitud un número como su medida exacta. Pero para responder efectivamente a dicha cuestiones, el MER debe contener además un modelo de la medida de magnitudes continuas como, por ejemplo, el que hemos descrito en (Licera, 2017).

(5) El MER en torno a los números reales debe tomar en consideración y resolver la *problemática técnica* relativa a la representación, comparación, y cálculo con números reales y con las inevitables *aproximaciones decimales*.

Miguel de Guzmán, en su libro *Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático* (Guzmán, 1990) caracteriza el sistema de los números reales como el conjunto de las expresiones decimales infinitas -identificándolas con una serie infinita- y define las operaciones recurriendo a la noción de límite de sucesiones monótonas. Esta caracterización (u otras equivalentes), inscripta en la enseñanza universitaria, permite operar con todo tipo de números reales pero excede las posibilidades de su estudio en la escuela media. Además, al margen de las restricciones institucionales, hay razones esenciales vinculadas a la medición y cálculo efectivo que exigen desarrollar una praxeología en torno a los números reales que permita, además de operar con estos números, que estas operaciones sean funcionales para trabajar con cantidades de magnitud. Entre dichas razones podemos citar:

(a) Los datos experimentales, resultados de mediciones efectivas, son necesariamente medidas aproximadas ya que están afectados por el error proveniente de la precisión de los instrumentos, del que sólo se conoce una cota, así como por otro tipo de errores.

(b) Existen números que no provienen de mediciones efectivas sino que se establecen teóricamente a partir de relaciones entre medidas (por ejemplo, la relación entre la longitud y el diámetro de la circunferencia) que resultan números irracionales. Por lo tanto, a la hora de calcular con ellos en el sistema de numeración decimal, se deberá usar una aproximación.

(c) Las técnicas de comparación y cálculo que involucran tecnología computacional manipulan sólo un subconjunto de expresiones decimales finitas, es decir, manipulan aproximaciones.

(d) El problema de la medición efectiva, tanto en contextos de la vida diaria como en ámbitos científicos, requiere de modelos matemáticos que permitan tener control sobre los errores de representación y sobre la propagación del error al operar con medidas aproximadas.

Entre las cuestiones que forman parte de esta problemática técnica podemos citar las siguientes:

¿Cómo desarrollar técnicas de cálculo que, manipulando expresiones decimales finitas, permitan dar "buenas respuestas" al problema del cálculo indirecto de medidas?, ¿Cómo controlar la propagación de los errores en dicho cálculo?

La respuesta a estas cuestiones exige el desarrollo de técnicas justificadas de representación y cálculo indirecto de medidas aproximadas como, por ejemplo, las que hemos propuesto en (Licera, 2017).

Retomando el criterio (3) respecto a definiciones de los números reales vigentes en el ámbito científico, observamos que es precisamente la necesidad de desarrollar elementos teóricos que permitan producir, explicar y justificar dichas técnicas matemáticas, lo que lleva a desarrollar diferentes formas de caracterizar el sistema de los números reales, las llamadas retrospectivamente *construcciones genéticas* y finalmente las *caracterizaciones axiomáticas*.

3.2. Dimensión económica: la contingencia institucional respecto del sistema de los números reales

Otra de las asunciones básicas de la TAD afirma que para estudiar un problema didáctico deben considerarse los datos empíricos que provienen de todas y cada una de las instituciones involucradas en el proceso de *transposición didáctica* (indicadas en la Figura 1), constituyéndose este conjunto de instituciones en la *unidad mínima de análisis* de los procesos didácticos (Bosch y Gascón, 2005).

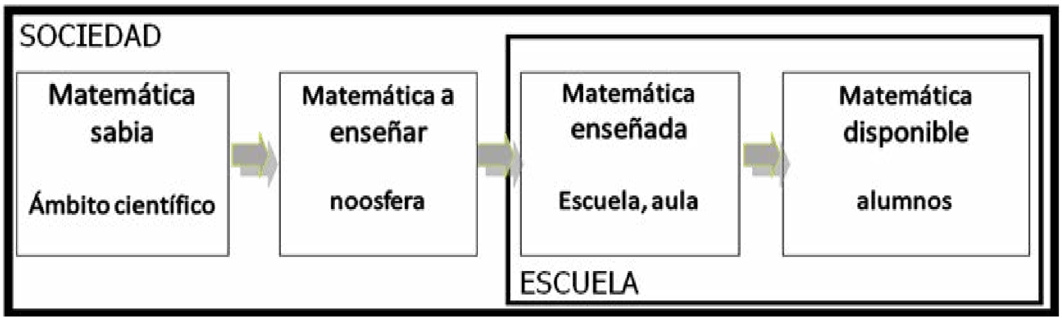

Figura 1. Instituciones que intervienen en el proceso de transposición didáctica

Esta unidad mínima de análisis plantea la complejidad de un problema didáctico y la preeminencia de lo institucional sobre lo personal. La relación que ha establecido el alumno con los saberes después de participar en un proceso didáctico, las llamadas *matemáticas disponibles*, están condicionadas por el tipo de actividades matemáticas que es posible llevar a cabo en la escuela (y por las que no es posible llevar a cabo), las *matemáticas enseñadas*. A su vez la escuela no toma decisiones libremente sino que responde a un mandato social. Por lo tanto, para entender lo que se enseña en la escuela hay que mirar este mandato, las *matemáticas a enseñar*, determinadas desde la *noosfera*. Además, el espacio donde se generan los saberes matemáticos, las *matemáticas sabias*, condicionan y son condicionadas por las decisiones de la noosfera.

Una de las funciones del MER es, precisamente, proporcionar un «lugar propio» desde donde mirar las distintas instituciones que intervienen en el proceso sin asumir acríticamente el punto de vista de ninguna de ellas. Esto no significa que, temporalmente, el estudio de la dimensión epistemológica preceda absolutamente a la económica; el trabajo investigativo de cada una de estas dimensiones obligará a volver sobre las otras.

Las cuestiones que forman parte de la dimensión económica[2] involucran la relación institucional a los saberes. Dicha dimensión incluye cuestiones relativas a las reglas y principios que regulan -en una institución determinada- la organización y el funcionamiento de la actividad matemática y las organizaciones didácticas involucradas en el problema didáctico (Gascón, 2011). En particular, algunas de las cuestiones que atañen a la dimensión económica del problema didáctico de los números reales son las que giran en torno al tipo de actividad matemática que se lleva a cabo con ellos en las distintas instituciones involucradas en el proceso de transposición didáctica. Nuestro MER guía el planteo de las cuestiones:

¿Cómo se enseñan actualmente los números reales en la enseñanza secundaria?, ¿Qué papel desempeñan en la matemática escolar?, ¿Cuál es la razón de ser que se le asigna oficialmente? En otros términos, ¿cuál es el modelo epistemológico dominante en la enseñanza secundaria en torno a los números reales?, ¿Qué relación se establece con las actividades de medida y de cálculo con valores aproximados?, ¿Cómo podemos dar cuenta del estado actual de las organizaciones matemáticas (y de las organizaciones didácticas asociadas) en torno a los números reales y la medida de magnitudes en la Enseñanza Secundaria? Y, finalmente, ¿qué fenómenos didácticos se pueden detectar en relación con esta enseñanza?

Para esquematizar brevemente algunas de las respuestas que hemos aportado a dichas cuestiones, hemos analizado la *matemática a enseñar* de los sistemas de enseñanza secundaria correspondientes a Chile, España y Argentina. Agrupamos estas respuestas en tres apartados (Licera, 2017).

(a) El mandato que recibe la escuela respecto a qué enseñar y cómo respecto a los números reales

Para analizar la respuesta oficial al problema del profesor en torno a los números reales, tomamos como material empírico los diseños curriculares oficiales y libros de texto actuales, específicamente los capítulos que introducen explícitamente la noción de número real. Los indicadores para el análisis son la presencia/ausencia de posibles razones de ser de la organización matemática a estudiar, los elementos praxeológicos presentes y las relaciones establecidas entre ellos que den cuenta de su *grado de completitud relativa* (Fonseca, 2004).

La respuesta oficial es muy similar en los tres países. Los números reales se presentan como una organización matemática incompleta, con elementos teóricos *decorativos* que, en un afán de generalización, identifican los nuevos números -los irracionales- ya sea con una escritura, las expresiones decimales infinitas no periódicas, ya sea con puntos de la recta numérica. Ambas representaciones no muestran ninguna funcionalidad operativa. Es muy evidente la ausencia de técnicas generales de representación que permitan a su vez desarrollar técnicas generales para trabajar con el nuevo sistema numérico (comparar, operar, etc.). Por consiguiente, las tareas resultan estereotipadas, aisladas, planteadas estrictamente en un contexto intramatemático (representar raíces cuadradas en la recta numérica, racionalizar expresiones de un único tipo) y asociadas a técnicas rígidas, de poco alcance. No se proponen cuestiones problemáticas que evidencien limitaciones de los sistemas numéricos conocidos (previos a los números reales) y que justifiquen la ampliación de estos sistemas. La introducción de los números irracionales no aporta nada a la actividad matemática que es posible llevar a cabo actualmente en la enseñanza secundaria.

(b) La relación entre los números y las medidas de magnitudes

Tomamos como material empírico las unidades correspondientes a *números* y *medidas* en los tres primeros años de la escuela secundaria (en este caso solo en el sistema de enseñanza de Argentina y tomando libros consecutivos de la misma editorial). Consideramos dos indicadores principales: la coherencia entre el trabajo con números y el trabajo con medidas y el tratamiento dado a las nociones de aproximación y error. En base a nuestro MER, queremos indagar si, en la matemática escolar, se articula el campo numérico (en el universo de los números positivos) con el estudio del problema de la medida.

Comprobamos la presencia de formas de trabajo diferentes en los bloques *números* y *medidas*. Por un lado, el estudio de los números se focaliza en un trabajo técnico referido a formas de representación y técnicas de cálculo exacto. Por otro, enmarcadas en un ámbito geométrico, las tareas relacionadas con medidas se restringen a un único aspecto, el uso de fórmulas para el cálculo, ignorándose la problemática de la aproximación de la medida y del error. Los números involucrados y los resultados de los cálculos pasan a un segundo plano y las actividades de medida efectiva están prácticamente ausentes. El sistema numérico que sustenta todas estas tareas es el de los números racionales. Vuelven a aparecer elementos praxeológicos decorativos que corresponden a las técnicas dadas bajo el titulo *redondeo y truncamiento* con tareas estereotipadas. Se pone en evidencia así el progresivo olvido de la problemática de la medida en la ampliación progresiva de los distintos conjuntos numéricos. En resumen, nuestro MER nos permite identificar un importante *fenómeno transpositivo* en la organización matemática de la enseñanza secundaria: *la desarticulación entre los números y la medida de magnitudes.*

(c) El campo numérico que sustenta la actividad matemática en la escuela secundaria

Nos centramos en los tres últimos años de la escuela secundaria en los sistemas educativos de los tres países mencionados, tomando como material empírico la praxis propuesta en los libros de texto después de haber pasado el tema de estudio *números reales*. Atendemos a las siguientes cuestiones: ¿Se incorporan efectivamente los números irracionales en la actividad matemática? ¿Cómo aparecen, cómo se les trata, qué dificultades surgen? Utilizamos dos indicadores: números que efectivamente se manipulan en la actividad matemática y presencia de fragilidades e inconsistencias en el tratamiento de lo numérico.

Aunque se afirma que se trabaja con números reales, la mayoría de las tareas (desarrolladas a modo de ejemplo o propuestas para el alumno) involucran sólo números racionales. Cuando se trata con números irracionales -porque no se pueden evitar- se evidencia la ausencia de técnicas y tecnologías pertinentes para trabajar con ellos. Aparecen, al menos, tres *estrategias de evitación* de la problemática subyacente al uso de los números reales (en particular al uso de los irracionales): se sustituye el número real por una aproximación racional como si se tratase del mismo número; se explicita el uso de una aproximación racional pero su elección es totalmente arbitraria; los números se dejan indicados en términos de operaciones, aduciendo que *es la representación exacta*. En la práctica efectiva no se cuestionan los resultados numéricos ni, en particular, el significado y alcance de los cálculos realizados con calculadora. Los elementos tecnológico-teóricos que hacen referencia a los números reales presentes en el discurso matemático escolar son meramente decorativos, esto es, no tienen ninguna incidencia efectiva en el trabajo matemático escolar.

A partir de estas observaciones identificamos otro fenómeno didáctico-matemático al que llamamos sintéticamente fenómeno de *evitación de los irracionales:* el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas en la escuela media evita el tratamiento de la problemática que provoca el uso de los números irracionales.

3.3. Cuestiones que integran la dimensión ecológica del problema didáctico de los números reales

Para analizar las condiciones *ecológicas* que se requieren para que determinados objetos y actividades puedan existir en la escuela, Chevallard (2002) introdujo la noción de *escala de niveles de codeterminación didáctica* que amplía y estructura el ámbito empírico que la TAD toma en consideración.

La organización de las praxeologías matemáticas y de las praxeologías didácticas requieren que estas cumplan una serie de condiciones que pueden ser específicas de la disciplina en cuestión (en nuestro caso las matemáticas) o bien genéricas, es decir, provenientes de la manera de organizar las actividades de enseñanza y aprendizaje en la escuela, los roles que se asigna a la escuela en la sociedad, etc. Estas condiciones se estructuran de forma jerárquica según muestra el esquema de la Figura 2. Las condiciones que se imponen en los distintos niveles de codeterminación didáctica, a la vez que hacen posible el desarrollo de determinadas actividades, también restringen el universo de acciones posibles.

Humanidad
↑↓
Civilización
↑↓
Sociedad
↑↓
Escuela
↑↓
Pedagogía
↑↓
Sistema didáctico
↑↓
Disciplina ↔Área ↔ Sector ↔ Tema ↔ Cuestión

Figura 2. Escala de niveles de codeterminación didáctica

Siguiendo a Lucas (2015), podemos decir que las cuestiones relativas a la dimensión ecológica de un problema didáctico son las que pretenden indagar qué tipo de restricciones, procedentes de qué nivel de codeterminación didáctica, son cruciales para la ecología de las praxeologías matemáticas y didácticas involucradas en dicho problema. De forma simplificada, podría decirse que la dimensión ecológica de un problema didáctico contiene las cuestiones que giran en torno a la siguiente pregunta: "¿por qué las cosas son como son en la contingencia institucional y qué condiciones se requerirían para que fuesen de otra forma dentro del universo de lo posible?" (Gascón, 2011, p. 217). En el caso particular que nos ocupa, nos preguntamos:

¿Qué restricciones institucionales inciden sobre la desarticulación y la incompletitud de las organizaciones matemáticas escolares en torno a los números reales?, ¿Qué restricciones institucionales explican los fenómenos didácticos identificados? En definitiva, ¿en qué niveles de la jerarquía de codeterminación didáctica surgen las restricciones que dificultan o impiden que las organizaciones matemáticas escolares en torno a los números reales incluyan elementos tecnológico-teóricos capaces de producir y justificar técnicas que promuevan un uso funcional de los números reales?

Como hemos dicho, el MER que proponemos sitúa inicialmente la razón de ser de los números reales en el problema de la medida de magnitudes continuas, lo que requiere un entorno institucional que ponga a disposición de los alumnos los medios para trabajar en este ámbito. Pero estos medios no están disponibles actualmente en la enseñanza secundaria.

La *desarticulación entre los números y la medida de magnitudes* constituye una manifestación particular del fenómeno didáctico disciplinar de la *desarticulación de la matemática escolar*. Tiene su origen en la práctica desaparición del problema de la medida del currículo escolar a pesar de que, según (Lebesgue, 1930, p.1), "no hay tema más fundamental: la medida de las magnitudes es el punto de partida de todas las aplicaciones de la matemática". Dentro de la escala de niveles de codeterminación, este fenómeno emerge en el nivel *Área* e impone restricciones a la tarea cotidiana del profesor que, como tal profesor, está sujeto al fenómeno del *autismo temático* (Chevallard, 2001) y, en consecuencia, no puede cuestionar ni incidir de manera robusta sobre las condiciones impuestas en niveles de codeterminación superiores al *Tema*.

Por su lado*,* vemos que el fenómeno de *evitación de los irracionales* se origina a nivel de la disciplina (matemática) donde predomina una concepción de los números reales muy influenciada por su caracterización axiomática. Esto es así porque la cultura escolar tiende a adoptar como modelo epistemológico de los saberes –en forma implícita, naturalizada y, por lo tanto, incuestionable– el vigente en el ámbito científico. En consecuencia, su estudio meramente formal no permite producir, cuestionar y desarrollar técnicas generales -y efectivas- de comparación y cálculo (especialmente, pero no únicamente) con los números irracionales. La evitación de los irracionales se pone de manifiesto así en todas las áreas del diseño curricular, aunque aparezca solapado y sus manifestaciones minimizadas.

A su vez, el que los sistemas numéricos en general y el sistema de los números reales en particular, se proponga como un objeto de estudio en sí mismo (aislado funcionalmente de las otras áreas de la matemática escolar), puede relacionarse con dos fenómenos generales: la *ausencia de la actividad de modelización* como actividad matemática esencial, y la vigencia de una *pedagogía monumentalista* que olvida las razones de ser de los saberes enseñados, en clara oposición a una presentación funcional de los mismos propia de una *pedagogía de cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2013b).

4. De la problemática básica a la primordial y de la escuela secundaria a la institución de formación del profesorado

Hemos partido de un *problema docente* sobre la enseñanza de los números reales en la escuela secundaria. El abordaje de las dimensiones epistemológica, económica y ecológica nos ha situado en una perspectiva más amplia que cuestiona fuertemente la organización matemática por enseñar, es decir, hemos pasado del problema docente al problema del currículum. Los problemas curriculares se encuadran dentro de la *problemática primordial* en didáctica que se define de la siguiente manera:

Dada la institución I (aquí, la enseñanza secundaria) sobre la que pesan un conjunto de restricciones K de todo tipo y dado un proyecto de formación (aquí, determinado por los fines educativo en relación al estudio de los números reales), ¿qué organizaciones O matemáticas y didácticas podrían ser necesarias para modificar las condiciones que pesan sobre la institución de tal forma que pueda llevarse a cabo el proyecto en cuestión?

En la formulación de la problemática primordial solo se consideran datos iniciales del problema, relativamente inmodificables, la institución involucrada y las restricciones que pesan sobre ella.

Podemos sintetizar las relaciones entre los tipos de problemas considerados en el cuadro de la Figura 3.

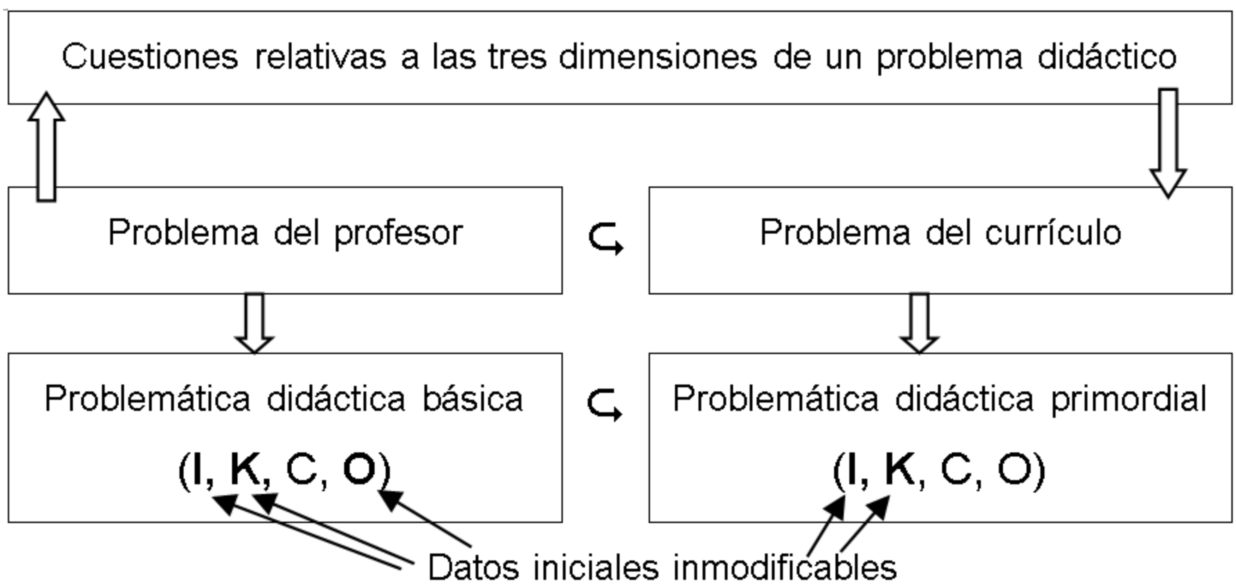

Figura 3. Relación entre tipos de problemas didácticos

Planteamos a continuación dos hipótesis que se apoyan en el análisis epistemológico de los números reales que ha cristalizado en el MER que proponemos, así como en los análisis económico y ecológico llevados a cabo y sustentados en dicho MER.

(H1) Una enseñanza explícita de los números reales como respuesta al problema de la medida (tal como se desprende del MER) y su desarrollo más allá de la consideración de los números reales como objetos *paramatemáticos* (Chevallard, 1997), que es el estatus que asumen actualmente dichos números en la organización matemática escolar, requeriría una *transformación profunda y global del currículo* de la enseñanza secundaria que está completamente fuera del alcance del profesorado.

Además, las posibles *presentaciones* de los irracionales no garantizan la forma en que se utilizarán posteriormente, debido a las limitaciones a las que está sujeto el trabajo técnico con números a lo largo de toda la escuela secundaria. En consecuencia, consideramos que las restricciones curriculares actualmente vigentes en secundaria, provenientes del modelo epistemológico (y didáctico) dominante de la matemática en general y de los números reales en particular, son demasiado robustas como para que sea factible llevar a cabo un cambio didáctico local en la dirección marcada por el MER que sea mínimamente efectivo.

(H2) La respuesta a las cuestiones que forman parte de la dimensión ecológica nos lleva a trasladar a la *institución de formación del profesorado* el cuestionamiento del currículo de secundaria en torno a los números reales y, por extensión, el problema didáctico de los números reales (Licera, 2017).

En efecto, dicho cuestionamiento, junto a las respuestas provisionales que se elaboren, pueden aportar conocimientos que requieren los profesores para:

(1) Delimitar y dilucidar la actividad matemática escolar (en la enseñanza secundaria) en torno a los números reales, cuestionando su estatuto y tratamiento.

(2) Interpretar los fenómenos didácticos que surgen en este ámbito y los efectos didácticos asociados, identificando el alcance de sus posibilidades como docentes para incidir sobre dichos efectos.

(3) Explicitar la razón de ser oficial que se asigna a los números reales en la enseñanza secundaria contrastándola con la razón de ser alternativa que le asigna el MER.

(4) Relacionar la actividad matemática en torno a los números reales con las diferentes áreas o bloques de la matemática por enseñar.

(5) Distinguir la *problemática básica*, sobre cómo enseñar los números reales con unas restricciones dadas, en la que estarán inmersos como profesores, de la *problemática primordial* que requiere cuestionar los conocimientos por enseñar y las condiciones necesarias para su implantación.

5. El problema didáctico de los números reales en el ámbito de la formación del profesorado

Nos encontramos frente a la *problemática primordial en la formación del profesorado*: ¿Qué enseñar sobre los números reales y sobre la forma de enseñarlos en secundaria? Disponemos de un elemento de respuesta provisional: el MER construido, que constituye el núcleo de una praxeología para la enseñanza sobre los números reales y la medida de magnitudes. Esta problemática nos lleva a su vez a la *problemática básica asociada en la formación del profesorado*: ¿cómo estudiar en la institución de formación del profesorado las cuestiones que estructuran el MER sobre los números reales y la medida? Tomando como referencia el trabajo de Ruiz-Olarría (2015), desde la TAD se propone un dispositivo didáctico, los *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP) como respuesta a esta cuestión.

El dispositivo de los REI, desarrollado y experimentado por varios investigadores que se inscriben en la TAD (Sierra, 2006; Barquero, 2009; Serrano, 2013; entre otros), integra la razón de ser de los saberes en el corazón mismo de los procesos de estudio. Partiendo de una *cuestión generatriz* Q_0, su objetivo es acordar, al interior de la comunidad de estudio, una respuesta propia que se designa como $R^{\heartsuit}$. Para esto los REI proponen una posición intermedia entre tomar la cuestión inicial como una excusa para imponer una respuesta y, en el otro extremo, intentar generar la propia *desde cero*. En la dinámica de los REI, la construcción de $R^{\heartsuit}$ pasa por la consideración critica de respuestas $R^{\lozenge}$ disponibles en la cultura, analizarlas, contrastarlas con un *medio* y cuestionarlas: ¿son las únicas posibles?, ¿Por qué se impusieron?, ¿Responden adecuadamente a la cuestión planteada?, ¿Qué potencialidad tienen?, ¿Se podrían proponer otras?. En este proceso Q_0 dará lugar a nuevas cuestiones derivadas Q_1, Q_2, Q_3,… cuyo abordaje dependerá de su potencialidad para contribuir a la elaboración de la respuesta $R^{\heartsuit}$. En Licera (2017) desarrollamos una primera experimentación de un REI-FP en la formación inicial del Profesorado en Matemática. La evolución de las cuestiones abordadas y respuestas tentativas condujeron a la progresiva construcción de una praxeología matemática *para la enseñanza* (Ruiz-Olarría, 2015) -que se institucionalizó como herramienta de análisis de la matemática escolar- dejando a su vez cuestiones abiertas relativas al diseño y puesta en marcha de esta estrategia metodológica.

Es evidente que el monumentalismo imperante en la enseñanza universitaria y secundaria también influye en la gestión de los REI-FP, incluso cuando los formadores son investigadores en didáctica conscientes de la necesidad de superar sus limitaciones. Para que los contratos didácticos más propios de la pedagogía del cuestionamiento del mundo se construyan y puedan vivir con normalidad en el aula, es necesario que elaboremos nuevos dispositivos pedagógicos, así como nuevos dispositivos didáctico-matemáticos que proporcionen alternativas a las maneras de hacer habituales (alejadas del estudio de *cuestiones problemáticas*, ya sea sobre los propios saberes como sobre la manera de enseñarlos en la escuela). El planteo del problema didáctico en el ámbito de la formación del profesorado aporta algunos elementos para progresar en esta vía en forma de proposiciones docentes y de materiales didácticos, y también en forma de necesidades detectadas y dificultades por superar.

Notas

1. Para ampliar consultar Licera, R. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado* (tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Disponible en la biblioteca de la PUCV.

2. Utilizamos el término *economía* en una de las acepciones que se proponen en (Moliner, 2007, p. 1098), donde se hace referencia a economía de un organismo (o de un sistema complejo cualquiera), para referirse a la coordinación de los componentes (o subsistemas) que intervienen en su funcionamiento (Barquero, Bosch y Gascón, 2013).

Referencias

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*, tesis doctoral. Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educação Matemática Pesquisa*. *15*(1), pp.1-28. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12757.

BAHUJAMA (2000). Análisis didáctico del artículo "El peso del recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM" en el marco de la teoría antropológica. *Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.* http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza, España.

Bosch, M. & Gascon, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A. et Margolinas, C. (Coord.), *Balises en Didactique des Mathématiques*, (pp. 107-122). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). 25 años de transposición didáctica, en Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. y García, F.J. (eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo* Didáctico, (pp. 385-406). Jaén, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén,

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie: Perspectives curriculaires : la notion de modelisation. *Petit x, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Chevallard, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona, España: ICE/Horsori.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. Conferencia impartida en las *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huesca, España. Consultado en la página web http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm.

Chevallard, Y. (2002*).* Organiser l'étude: 3. Ecologie & régulation. Curso dado en la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 de agosto de2001) (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En Bosch, M. (Ed.) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4).* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2013a). Curso impartido en las I Jornadas de Estudio en Educación Matemática. Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba, Argentina.

Chevallard, Y. (2013b). *La matemática en la escuela: Por una revolución epistemológica y didáctica*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la Secundaria y la Universidad*, tesis doctoral. Universidad de Vigo, España.

Gascón, J. (1999). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. In T. Ortega, (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 129-150). Valladolid, España: SEIEM.

Gascón, J. (2004). Incidencia del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. En E. Palacián (Ed.), *Aspectos didácticos de* matemáticas (pp. 81-124).. Zaragoza, España: ICE de la Universidad de Zaragoza.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 14*(2), 203-231.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación matemática, edición especial 25 años*, 99-123.

Guzmán, M. et al (1990). *Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático*. Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Klein, F. (1945). *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid, España: Biblioteca matemática.

Lebesgue, H. (1930). *La mesure des grandeurs*. Albert Blanchard, Paris, Francia (réédition de 1975). Edición en español 1995.

Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*, tesis doctoral. Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial. Vigo, España.

Moliner, M. (2007). Diccionario de uso español. Madrid, España: Gredos.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*, tesis Doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Madrid, España.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa. Análisis ecológico y propuesta didáctica*, tesis doctoral. Universitat Ramon Llull, Barcelona, España.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas*, tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, España.